滋賀大学教育学部紀要　自然科学
No. 53, pp. 35－38, 2003

ボックスカウント法による琵琶湖のフラクタル次元

水　上　善　博

Fractal Dimension of Lake Biwa by Box-counting Method

Yoshihiro MIZUKAMI

Abstract

Accuracy of fractal dimension by box-counting method is examined. Fractal dimensions of several typical figures are analyzed by box-counting method on digital computer. Numbers of boxes for digital image of the figures are counted to determine the fractal dimensions of them. Unit of the box size is pixel. This method is applied to analyze the fractal dimension of the area of Lake Biwa.

1. はじめに

複雑な形をした図形の特長を表す指標としてフラクタル次元は有用である。自己相似性をもつ図形においては、正確なフラクタル次元を解析的に求められる場合がある（マンデルブロ、1985)。しかし、一般的な図形のフラクタル次元を求める場合においては、計測を行って、その結果からフラクタル次元を計算するのが普通である。フラクタル次元を計測から求める場合は、粗視可の度合いを変える方法がしばしば用いられる。例えば、複雑な曲線のフラクタル次元を求める場合には、ディバイダー法がよく用いられる。また、複雑な形をした面のフラクタル次元を求める場合には、ボックスカウント法がよく用いられる（石村貞夫・石村園子、1990)。様々な自然の造形のフラクタル次元が求められているが、我々は、琵琶湖の湖岸線のフラクタル次元をディバイダー法による計測から求めて報告を行っている（水上善博・浅岡亮、2002)。ボックスカウント法によって、琵琶湖の湖岸線のフラクタル次元を求める試みもなされているが、ボックスカウント法によってフラクタル次元を求める場合、誤差が大きくなり、求められたフラクタル次元の値の信頼性に問題があることが指摘されている（金本研進、1999)。本研究では、まず、ボックスカウント法によって求められたフラクタル次元の値の信頼性を知るために、正確なフラクタル次元がわかっている図形（シェルピンスキー・ガスケット、ヴィチェック雪片）のデジタル画像を作成し、コンピュータ上で、ボックスカウント法によるデジタル画像の計測を行い図形のフラクタル次元を求め、正確な値との比較を行った。さらに、この方法を、マンデルブロ集合のフラクタル次元の解析に応用した。マンデルブロ集合は、境界線のフラクタル次元は2であることが報告されている（Shishikura, 1994）が、面に関しては正確なフラクタル次元は求められていないようである。最後に、この方法を応用して琵琶湖の面のフラクタル次元を求めた。

2. 方　　法

2. 1　デジタル画像の作成

シェルピンスキー・ガスケットとヴィチェック雪片のパターンは、Microsoft Excel のスプレッドシートのセル（セル数は 256 × 256）を黒く塗りつぶすことによって作成した。これらのデータを画像処理ソフトに取りこんで、シェルピンスキー・ガスケットとヴィチェック雪片のデジタル画像ファイル（BMP 形式）をそれぞれ作成した。このようにして作成した、シェルピンスキー・ガスケットとヴィチェック雪片を図 1 と図 2 にそれぞれ示す。なお、画像の画素数は、シェルピンスキー・ガスケットが、921 × 801 pixels、ヴィチェック雪片が、581 × 557 pixels であった。マンデルブロ集合は BASIC 言語のプログラムによって、コンピュータの画面上にグラフィック表示し、コンピュータ画面全体をハードコピーして、画像処理ソフトに取りこんだ。必要な部分を切り取って、マンデルブロ集合の画像ファイル（BMP 形式）を作成した。このようにして作成した、マンデルブロ集合を図 3 に示す。マンデルブロ集合の画像の画素数は、501 × 401 pixels で

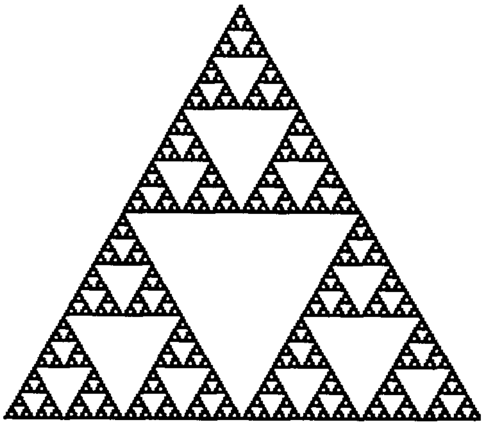

図 1　シェルピンスキー・ガスケット

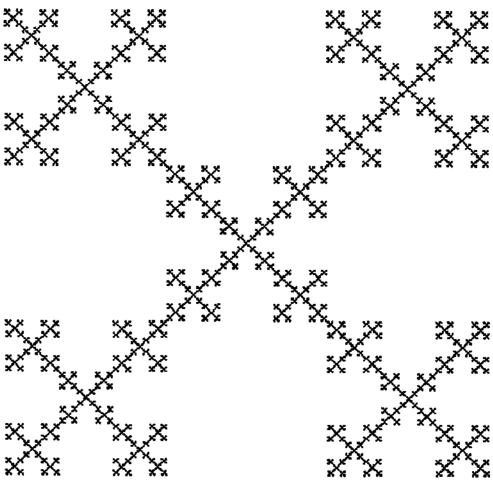

図 2　ヴィチェック雪片

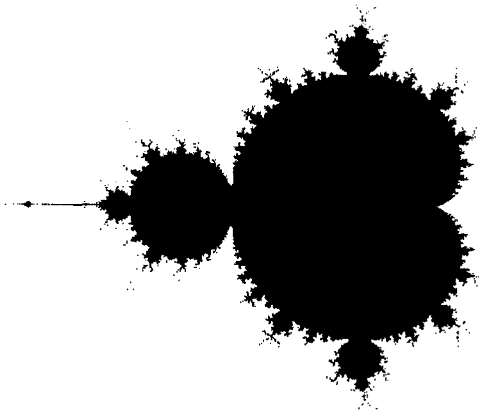

図 3　マンデルブロ集合

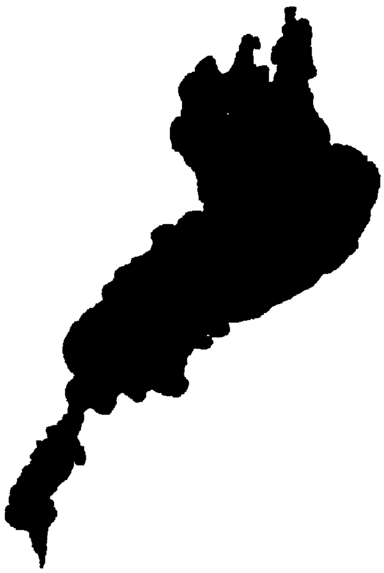

図 4　琵琶湖

あった。琵琶湖の形は、平成9年発行の「分県地図滋賀県」(縮尺120,000分の1)(昭文社)を縮小し書き写したものを用いた。これをスキャナーで画像処理ソフトに取りこみ、琵琶湖の面だけを黒く塗りつぶしデジタル画像ファイル(BMP形式)として保存した。このようにして作成した琵琶湖全体を図4に示す。琵琶湖の画像の画素数は、529 × 827 pixelsであった。

2.2 ボックスカウント法によるフラクタル次元の解析

ある平面内に存在する図形を、1辺の長さが d の正方形で分割するとき、その図形が $N(d)$ 個の正方形で覆われたとすると、$N(d)$ と d との間に、

$$N(d)=a\,d^{-D} \quad (a\text{は正の定数}) \qquad (1)$$

という関係が成り立つとき、D をその図形のフラクタル次元と定義する。
(1)式の両辺の対数をとると、

$$log_{10}N(d)=-D\log_{10}d+\log_{10}a \qquad (2)$$

となり、d と $N(d)$ のlog－logプロットを描けば、その直線の傾きからフラクタル次元を求めることができる。

本研究では、ImageJ 1.29 xというパブリックドメインのソフトウェア(作者はWayne Rsband氏)を用いて、デジタル画像のフラクタル次元をボックスカウント法で求めた。正方形のボックスの一辺の長さ d の単位はピクセルとし、$\log_{10}d$ がほぼ等間隔になるように d を決めた。本研究で用いたデジタル画像のサイズはいずれも1000 × 1000 pixelsよりも小さいことより、

$$0<log_{10}d<3$$

となる。そこで、$\log_{10}d$ が0.25から2.5まで0.25きざみでほぼ等間隔になるようにdを選び、結局、正方形の一辺 d が、$d=2, 3, 5, 10, 18, 32, 60, 100, 180, 320$ となる、10種類のボックスを用いてボックスカウンティングを行った。前処理として、各図形のBMP形式のデジタル画像の各ピクセルを、黒白に2値化した後、一辺 d (ピクセル)の正方形で図形が覆われる数(被覆数)$N(d)$ を自動的に計測し記録した。

3. 結果と考察

表1に一辺が d の正方形でシェルピンスキー・ガスケット、ヴィチェック雪片、マンデルブロ集合、琵琶湖を覆ったときの被覆数 $N(d)$ を示す。d と $N(d)$ のlog－logプロットの直線の傾きから求めたフラクタル次元 D(exptl.)およびlog－logプロットの相関係数 R^2 もあわせて示す。シェルピンスキー・ガスケットとヴィチェック雪片については、理論

表1 ボックスカウント法で用いた正方形の一辺 d (単位はピクセル)と各図形の被覆数 $N(d)$、d と $N(d)$ のlog-logプロットの相関係数 R^2、ボックスカウント法から求められたフラクタル次元 D (exptl.)および理論値 D (theory)

	シェルピンスキーガスケット	ヴィチェック雪片	マンデルブロ集合	琵琶湖
d	$N(d)$	$N(d)$	$N(d)$	$N(d)$
2	31611	7764	17568	25274
3	15396	4965	8181	11395
5	6455	2476	3156	4225
10	2032	924	901	1126
18	803	399	323	381
32	297	167	127	137
60	115	68	46	49
100	48	30	22	25
180	22	12	9	9
320	9	4	4	5
R^2	0.999	0.998	0.998	0.995
D (*exptl.*)	1.610	1.482	1.657	1.709
D (*theory*)	1.58496 …	1.46497 …		

から正確なフラクタル次元を求めることができて、

シェルピンスキー・ガスケット
$\log_{10}3/\log_{10}2 = 1.5849625......$
ヴィチェック雪片
$\log_{10}5/\log_{10}3 = 1.4649735......$

となる（松下貢、2002）。これらの値もあわせて表1に示す。

シェルピンスキー・ガスケットのボックスカウント法によるフラクタル次元は1.610と求まり、これは、理論値から求められるフラクタル次元1.585より0.025大きく、約1.6%過大評価している。また、ヴィチェック雪片のボックスカウント法によるフラクタル次元は1.482と求まり、これは、理論値から求められるフラクタル次元1.465より0.017大きく、約1.2%過大評価している。シェルピンスキー・ガスケット、ヴィチェック雪片ともに、理論値との差は、僅かであり、本研究で用いられた方法で、比較的精度の高いフラクタル次元が得られることがわかった。松下らは、ボックスの形を、正方形以外に、六角形や近似円をもちいたボックスカウント法により、シェルピンスキー・ガスケットのフラクタル次元を求めているが、例えば、ボックスとして六角形を用いた場合は、理論値との誤差は2.1%と報告している。彼らは、誤差の原因は用いるボックスの方向依存性によって生じると結論付けており、正方形よりも方向依存性が少ない、六角形や近似円を用いる方が、より精度の高いフラクタル次元が得られると述べている（松下貢1992）。本研究では、正方形のボックスを用いているので、六角形や近似円のボックスを用いれば、さらに精度の高いフラクタル次元を得られる可能性があると考えられる。

マンデルブロ集合のフラクタル次元は、ボックスカウント法からは1.657と求まった。Shishikuraらは、マンデルブロ集合の境界線のフラクタル次元が2であることを報告しているが、マンデルブロ集合の面のフラクタル次元を理論的に求めることは、今後の課題であると思われる。

ボックスカウント法による琵琶湖の面のフラクタル次元は、1.709と求まった。琵琶湖の面のフラクタル次元の報告は、本研究が初めてであるが、dと$N(d)$のlog－logプロットの直線の相関係数R^2を見ると、シェルピンスキー・ガスケット、ヴィチェック雪片、マンデルブロ集合のそれらは、0.999, 0.998, 0.998と高い相関があるのにたいして、琵琶湖の相関係数は、0.995と、少し相関が低い結果となった。これは、用いたボックスの形状や大きさが、琵琶湖面の形を測る場合に最適なものではなかった可能性が考えられ、この点は、より精度の高い琵琶湖の面のフラクタル次元を計測するためには、今後、改善していく必要があると思われる。

文　献

B. マンデルブロ（1985）『フラクタル幾何学』，日経サイエンス社.

石村貞夫，石村園子（1990）『フラクタル数学』，東京図書.

水上善博，浅岡　亮（2002）滋賀大学教育学部紀要，vol. 51, 43－48.

金本研進（1999）「琵琶湖岸のフラクタル次元の解析」，滋賀大学教育学部卒業論文.

Mitsuhiro Shishikura（1994）“The boundary of the Mandelbrot set has Hausdorff dimension two.” Complex Analytic Methods in Dynamical Systems.（Rio de Janeiro, 1992.）Astérisque No. 222, 389－405.

ImageJ 1.29 x, Wayne Rsband, National Institute for Health, USA. ImageJ is in the public domain.

松下貢（2002）『フラクタルの物理』，裳華房.

松下貢（1992）『医学・生物学におけるフラクタル』，朝倉書店.