

雪の結晶のフラクタル次元について

水 上 善 博・鈴 江 夕 子

On the Fractal Dimension of Snow Crystal

Yoshihiro MIZUKAMI and Yuko SUZUE

Abstract

Fractal dimension of snow crystal was measured. Program codes to estimate fractal dimension with digital image data of snow crystal by box-counting method and dimensional analysis were developed. Fractal dimensions for three typical kinds of snow crystals are determined.

1. はじめに

山の起伏や川に分岐、木の枝ぶりや雲の形状、稲妻の屈折した形など、自然の造形には複雑な形をしているものが多い。これらの形は、特徴的な長さをもたない自己相似な性質を有している場合が多く、このような形を表現する方法としてフラクタルという概念が提唱されている（マンデルブロ、1985）。マンデルブロの著書「フラクタル幾何学」の中でも紹介されているが、コッホ曲線を3つつなぎ合わせると図1に示すような「コッホの雪片」と呼ばれる雪の結晶の輪郭に類似した図形を作ることができる。雪の結晶は生成されときの温度や湿度の違いによって多様な形が生み出されることが知られているが、雪の結晶の形にもフラクタル性があるのではないかとされている。

雪の結晶については、古くから研究が行われているが、その嚆矢となるのは中谷宇吉郎である。中谷は天然雪の研究から始め、1930年代に世界で最初に人口雪を作ること成功し、雪の結晶の生成条件を明らかにして「ナカヤ・ダ

イヤグラム」としてまとめあげた。中谷は著書「雪」の最後を「・・・雪の結晶は、天から送られた手紙である・・・」と結んでいる（中谷宇吉郎、1994）。現在においても、なお、雪の結晶成長に関しては不明な点が多く、精力的な研究が続けられている（Libbrecht, 2005）。

本研究では、雪の結晶のフラクタル次元を画像処理の手法を用いて解析することを目的とする。

2. 方法

フラクタル次元の計測を行った3種類の雪の結晶を図2に示す。中谷による分類では、いずれも板状結晶正規六花型に属するもので、図2の上から、角板付樹枝^{a)}、広幅六花^{b)}、樹枝付角板^{c)}である。これらの結晶はいずれも温度が -15°C 程度で生成されるが、角板付樹枝と樹枝付角板を生成するためには、特に湿度が高いという条件が必要となる（ケン・リブレクト、2008）。本研究では、雪の結晶のカラーデジタル画像を読み込んでフラクタル次元解

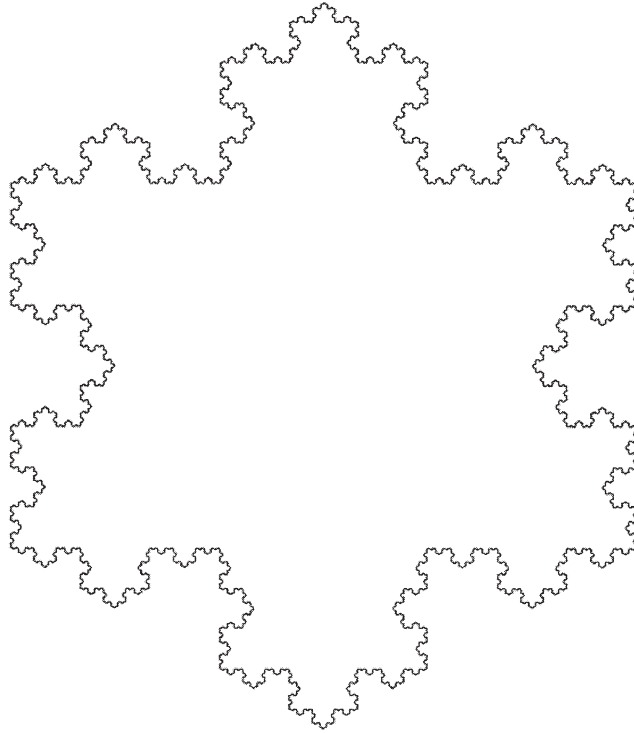


図1 コッホの雪片

析を実行するコンピュータプログラムを Visual Basic を用いて作成した。フラクタル次元は 2 つの異なる方法で計測した。1 つはボックスカウント法である (図 3 左参照)。この方法は、図形を正方形で近似するが、正方形の一辺の長さを変えることによって、粗視化の度合を変化させてフラクタル次元を求める方法である。具体的には、一辺の長さが r の正方形で図形を被覆する際に必要となる正方形の個数を $N(r)$ として、 r の値を変えて $N(r)$ を測り、 $\log r$ と $\log N(r)$ の $\log\text{-}\log$ プロットを描いて、その回帰直線の傾きからフラクタル次元を算出するという方法である。

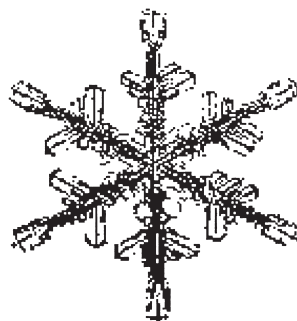
もう 1 つは測度の関係からフラクタル次元を求める方法である (図 3 右参照)。雪の結晶は六角形を基本とした六方対称性を有するものが多い。そこで、雪の結晶の中心から同心円を描いて、それぞれの円の内側の図形の面積を測り、円の半径との関係性からフラクタル次元を

求めることができる。本研究では、雪の結晶の図形はデジタル画像を用いるので、図形の面積はデジタル画像のピクセル数を計測して求める。具体的には、雪の結晶の中心からの半径 d の円の中にある画像のピクセル数を $N(d)$ として、いくつかの異なる d の円の中の $N(d)$ を計測して $\log d$ と $\log N(d)$ の $\log\text{-}\log$ プロットを描いて、その回帰直線の傾きからフラクタル次元を算出する。

上記の 2 つのいずれの方法においても、まず、 258×258 ピクセルの雪の結晶のカラー画像を読み込み、それを二値化して白黒画像へ変換を行う。図 2 に二値化された後の雪の結晶の画像を示す。なお、二値化する際のしきい値は、二値化された後も元の画像の特徴が失われないように、目で見て判断しながら試行錯誤して決定した。その結果、図 2(b)、図 2(d) 図 2(f) の二値化画像を作成する際のしきい値の値は、それぞれ、160、180、170 であった。次に、ボツ



(a) 角板付樹枝



(b) 角板付樹枝の二値化画像



(c) 広幅六花



(d) 広幅六花の二値化画像



(e) 樹枝付角板



(f) 樹枝付角板の二値化画像

図2 雪の結晶（板状結晶正規六花型）のグレースケール画像と二値化画像

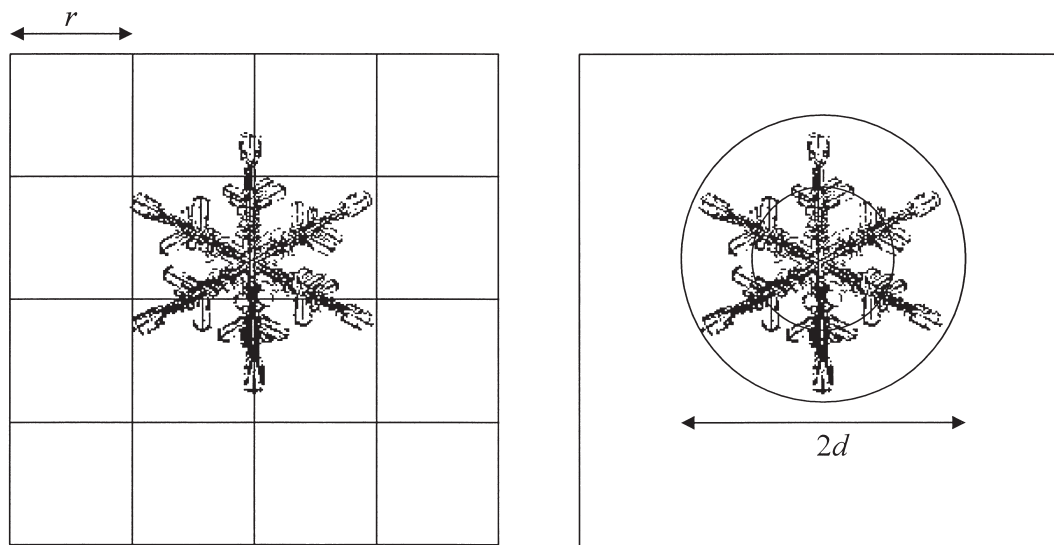


図3 ボックスカウント法（左）と次元解析法（右）

ボックスカウント法では、正方形の一辺を r として、 $r = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ ピクセルの 6 種類を用いて、それぞれの r について被覆数 $N(r)$ を自動的に計測できるようにした。また、次元解析法では、円の半径 d は、円の中心と雪の結晶の最先端との距離を R として、 $d = R, R-2, R-4, R-8, R-16, R-32$ ピクセルの 6 種類とし、それぞれの円の内部に存在する黒のピクセルの数を計測することによって面積を求めた。なお、円の中心座標と雪の結晶の最先端の座標は雪の結晶の画像をクリックして読み込めるようにした。log-log プロットの回帰直線の傾きと切片は最小二乗法で求め、決定係数 R^2 を計算した。

なお、入手したカラー画像は、プログラムで読み込めるように、あらかじめペイントなどの画像処理ソフトによって画像の大きさを 258×258 ピクセルに加工して前処理を施した。

3. 結果と考察

ボックスカウント法および次元解析法によって求められた 3 種類の雪の結晶（角板付樹枝、広幅六花、樹枝付角板）のフラクタル次元 (D) とフラクタル次元を算出するときに用いた log-log プロットの回帰直線の決定係数 (R^2) の値を表 1 にまとめて示す。

ボックスカウント法では、角板付樹枝のフラクタル次元は 1.547、決定係数は 0.999 となった。広幅六花のフラクタル次元は 1.616、決定係数は 0.999 となった。樹枝付角板では、フラクタル次元は 1.596、決定係数は 0.999 となった。いずれの結果においても R^2 の値が 0.999 と極めて高い値を示したことから、これら 3 種の雪の結晶の形状にはフラクタル性が

表1 雪の結晶のフラクタル次元とフラクタル次元を算出するときに用いた回帰直線の決定係数

	ボックスカウント法		次元解析法	
	フラクタル次元(D)	決定係数(R^2)	フラクタル次元(D)	決定係数(R^2)
角板付樹枝	1.547	0.999	1.523	0.990
広幅六花	1.616	0.999	3.827	0.988
樹枝付角板	1.596	0.999	1.561	0.993

あるといえる。また、これらの雪の結晶のフラクタル次元は 1.55 ～ 1.62 程度であることがわかった。

次に、次元解析法では、角板付樹枝のフラクタル次元は 1.523、決定係数は 0.990 となった。広幅六花のフラクタル次元は 3.827、決定係数は 0.988 となった。樹枝付角板では、フラクタル次元は 1.561、決定係数は 0.993 となった。決定係数の値は 0.99 前後となり、ボックスカウント法に比べて低い値となった。フラクタル次元に関しては、角板付樹枝はボックスカウント法の 1.547 に対して次元解析法では 1.523 と比較できる値となった。樹枝付角板についてもボックスカウント法の 1.596 に対して次元解析法では 1.561 と比較できる。ところが、広幅六花のフラクタル次元は次元解析法では 3.827 となり、ボックスカウント法の 1.616 に対して極めて大きい値となった。理論的には、平面図形のフラクタル次元の最大値には上限があることがわかる。例えば、半径 r の円の面積は $\pi \times r \times r$ なので、 $\log$ をとれば、 $2\log r + \log \pi$ となり、 $\log\text{-}\log$ プロットの傾きが 2 となることから、円のフラクタル次元の最大値は 2 となる。先に得られた、次元解析による広幅六花のフラクタル次元は 3.827 であり、これは最大値 2 を超えた値となっており、理論的に矛盾がある。このような結果をもたらした原因は広幅六花の二値化された画像において中心近傍が空洞となっており図形が存在しない部分（黒いピクセルがない部分）があるため、本研究において次元解析に対して用いられた計測アルゴリズムがうまく機能していないためであると考えられる。ただし、誤差の原因である中心近傍の黒いピクセルがない部分を $\log\text{-}\log$ プロットの範囲から除外するという簡単な措置だけではこのエラーは解消できなかった。しかし、二値化する前に画像をぬりつぶして、雪の結晶の透明な部分が白ではなく黒い色に変換されるように前処理を施すと、次元解析法による広幅六花のフラクタル次元が 1.686 となって改善されることが報告されている（鈴江夕子、2007）。

雪の結晶の成長は以下のように起こると考えられている（ケン・リブレクト、2008）。

まず、空気中の塵や埃などの微小粒子が核となって六角形の対称性をもった氷の平板な結晶が成長する。滑らかな辺（六角形の各辺）はゆっくり成長するのでその結果、角の部分が顕著に表れる。平板は大きくなってくると不安定なので角から腕が伸びてくる。結晶は異なる温度へ成長するので腕はますます伸びる。さらに複雑な温度分布が生じて複雑な構造を生み出していく。この結果、雪の結晶は 2 つとして同じ形のものではないといえられている。このような、雪の結晶の成長過程から、どのようにしてマクロな形においてフラクタル性が生まれるのかについてはいまだに良くわかっておらず、今後の研究課題であると思われる。

平面図形のフラクタル次元の大きさは、図形の形の複雑さと図形がいかに広く面を覆うかの主に 2 つの要素から決まってくる。本研究で測定した雪の結晶の場合、フラクタル次元の大きさは、広幅六花、樹枝付角板、角板付樹枝の順となった。広幅六花は図形の形が複雑であるというよりも、むしろ平面をより多く覆っているためにフラクタル次元が大きくなったと思われる。一方で、樹枝付角板と角板付樹枝は、よく似た形をしており、フラクタル次元が近い値となったので、これらは複雑さの度合いも似ていると考えられる。

また、樹枝付角板と角板付樹枝では、樹枝付角板のほうがフラクタル次元は大きくなったが、雪の結晶は、水蒸気圧が高くなると成長が速くなり、より表面積の大きい複雑な形になることから、樹枝付角板のほうがより水蒸気圧の高い場所で生成されたのではないかと推測される。

文献

B. マンデルブロ (1985) 『フラクタル幾何学』、日経サイエンス社.

中谷宇吉郎 (1994) 『雪』、岩波文庫.

Kenneth G Libbrecht (2005) "The physics of snow crystals", Rep. Prog. Phys., **68**, 855-895.

ケン・リブレクト (矢野真千子訳) (2008) 雪の結晶—小さな神秘の世界、河出書房新社.

鈴江夕子 (2007) 「雪の結晶のフラクタル性に関する研究」、滋賀大学教育学部卒業論文.

a) <http://www.seppyo.org/~hokkaido/index.html>

(独)日本雪氷学会北海道支部

b), c) <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals>
SnowCrystals.com